

CONCEPTION ET APPLICATIONS DES ENCODERS LOGARITHMIQUES

A. GSPONER*

CERN, Genève, Suisse

Reçu le 1 avril 1971

Two fast and cheap logarithmic encoders are described. In a range of 40 dB they are linear within a precision of less than 3% in a gated mode or not. Several applications are suggested: distributed measurement with proportional chambers, particle identification, and mass discrimination with Čerenkov counters.

1. Introduction

1.1. DIGITALISATION DES EXPÉRIENCES DE PHYSIQUE NUCLEAIRE

La technique des expériences de physique nucléaire montre actuellement une nette tendance vers la digitalisation. L'utilisation d'ordinateurs "on line", l'introduction de mini-ordinateurs et de systèmes d'acquisition de données tels que "CAMAC" en sont les signes caractéristiques. Cette utilisation d'ordinateurs sous-entend l'emploi de convertisseurs analogiques-numériques. Dans ces conditions, en plus du détecteur, l'élément crucial d'une chaîne de mesure devient le convertisseur analogique-numérique. En effet, diverses méthodes sont susceptibles d'extraire une information digitale d'un signal analogique, et chacune de ces méthodes constitue une technique de mesure particulière. Ainsi, à chaque problème de digitalisation correspond un choix particulier de convertisseur analogique-numérique. Nous allons dans cette étude montrer que, dans de nombreuses situations, l'utilisation d'un convertisseur logarithmique peut s'imposer.

1.2. QUELQUES DÉFINITIONS

Encoder: Convertisseur analogique-numérique délivrant un train d'impulsions dont le nombre N est fonction de l'amplitude ou de la charge Q d'une impulsion:

$$N = f(Q),$$

f est la fonction caractéristique de l'encoder.

Exemples:

Encoder linéaire: $N \sim Q$.

Encoder logarithmique: $N \sim \ln(Q/Q_0)$.

Mesure distribuée: Mesure d'une grandeur par l'intermédiaire d'une batterie de N détecteurs semblables stimulés identiquement par la même particule.

Le résultat d'une mesure distribuée est un échantillon de mesure de population N (y_1, \dots, y_N), sur lequel on fait une certaine moyenne \bar{y} .

Exemple:

Mesure de dE/dx par une batterie de compteurs proportionnels.

Lorsqu'on considère un certain type d'encoder, il faut distinguer ses propriétés spécifiques de ses propriétés statistiques, lorsqu'il est utilisé dans une mesure distribuée.

Note: Dans le cas de la détection des particules élémentaires, une mesure distribuée sur $2N$ compteurs peut toujours être associée à une mesure distribuée de temps de vol sur les N intervalles séparant deux groupes de ces détecteurs.

2. Propriétés statistiques des encoders

2.1. RAPPELS

Soit une statistique de mesures indépendantes distribuées selon une fonction $f(x)$ telle que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx < A.$$

On appellera:

Valeur de la mesure x_0 :

$$x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Dans le cas d'un échantillon de population N finie, une estimation de la mesure sera:

$$\bar{x} = (1/N) \sum_{i=1}^N x_i.$$

Erreur statistique:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 f(x) dx.$$

Une estimation en sera:

$$\bar{\sigma}^2 = (1/N) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

* Visiteur de l'Institut de Physique Nucléaire de l'Université de Lausanne.

Théorème I: Si l'erreur statistique sur une mesure effectuée sur un échantillon donné est σ , l'erreur statistique σ' sur un échantillon de population N fois plus grande sera:

$$\sigma' = \sigma/\sqrt{N}.$$

Exemple: Distribution de Gauss (fig. 1A):

$$\exp(-x^2/2\sigma^2).$$

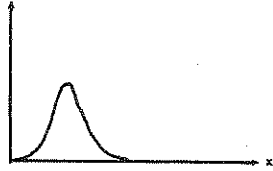


Fig. 1A.

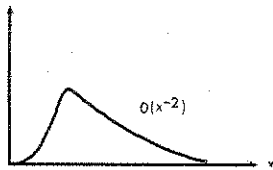


Fig. 1B.

Contre exemple: Distribution de Landau (fig. 1B): En effet, l'intégrale

$$\int (x^{-2})x^2 dx$$

diverge à l'infini!

2.2. CHANGEMENT DE COORDONNÉES (fig. 2)

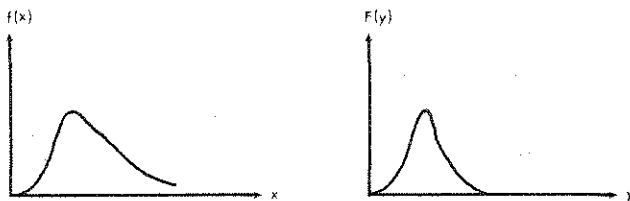


Fig. 2.

Soit un changement de coordonnées $y = y(x)$, $x = y^{-1}(y)$,

$$f(x)dx = f[y^{-1}(y)] (\partial x/\partial y) dy = F(y) dy,$$

donc:

$$F(y) = f[y^{-1}(y)] (\partial x/\partial y).$$

Interprétation physique d'un changement de coordonnées: Un changement de coordonnées correspond à un changement d'appareil de mesure.

a. Transformation linéaire:

changement d'échelle.

b. Transformation non linéaire:

changement de méthode.

Ainsi, dans le cas d'une transformation logarithmique à une mesure d'incertitude absolue constante, on substitue une mesure d'incertitude relative constante.

Théorème II: Soit une statistique $f(x)$ telle que:

$$f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-a}) \quad \text{pour} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Le théorème I peut être appliqué à une mesure de cette statistique si cette mesure est faite par un appareil réalisant un changement de coordonnées $y = y(x)$ tel que:

$$y(x) = \mathcal{O}(|x|^{1/b}) \quad \text{pour} \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

avec:

$$b > 2/(a-1).$$

Démonstration: Soit:

$$y = x^{1/b}; \quad x = y^b; \quad \partial x/\partial y = by^{b-1};$$

alors

$$F(y) = \mathcal{O}(b/y^{ab} y^{b-1})$$

et

$$\int F(y)y^m dy = \mathcal{O} \left[\int \frac{y^{b-1+m}}{y^{ab}} dy \right]$$

converge si $ab > b + m$, donc si $b > (m/a - 1)$; avec $m = 2$, on obtient le résultat ci-dessus.

2.3. TRANSFORMATION LOGARITHMIQUE

Faisons un changement de coordonnées logarithmiques: $y = \ln x$.

Exemple: Utilisation d'un encodeur logarithmique.

Propriétés:

a. On a

$$dy = dx/x.$$

Donc, l'incertitude absolue constante sur y correspond à l'incertitude relative sur x

$$I_a(y) = I_r(x).$$

b. Le logarithme jouit de la propriété particulière:

$$\ln x = \mathcal{O}(x^{1/b}), \quad \forall b > 0 \quad \text{pour} \quad x \rightarrow \infty.$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} y^m F(y) dy < A \quad \text{pour} \quad \forall m.$$

De cette manière, par le théorème précédent, le théorème I s'applique à la distribution $F(y)$.

2.4. MESURE LOGARITHMIQUE

Soit à mesurer une grandeur aléatoire x , distribuée selon une fonction génératrice $f(x)$ telle que:

$$f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-a}) \quad \text{pour} \quad |x| \leftarrow +\infty, \\ a > 1, \\ f(x) \text{ bornée.}$$

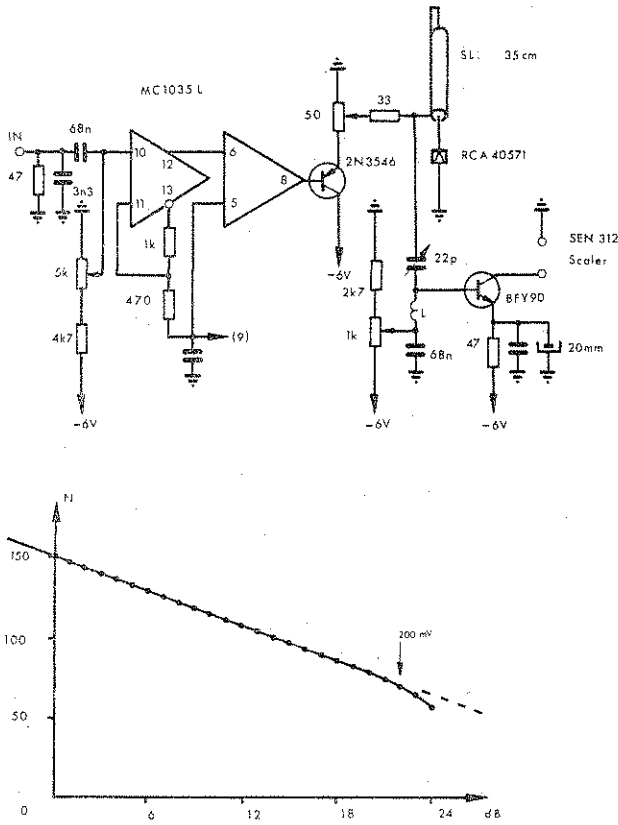


Fig. 3. A) Encoder logarithmique de 100 MHz. B) Comportement aux faibles amplitudes.

Soit (...y_i...) un échantillon de mesure de x donné par un appareillage de mesure à réponse logarithmique. a. Une estimation de la mesure de x est donnée par:

$$\bar{x} = \exp \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \right].$$

b. L'incertitude relative sur \bar{x} est caractérisée par l'erreur quadratique moyenne sur l'échantillon (...y_i...).

c. L'incertitude relative sur \bar{x} est inversement proportionnelle à la racine \sqrt{N} de la population N de l'échantillon. Ainsi, dans une mesure logarithmique, l'incertitude relative se comporte comme l'incertitude absolue dans une mesure linéaire.

d. La classe des distributions auxquelles le théorème I s'applique est plus large dans le cas d'une mesure logarithmique que dans le cas d'une mesure proportionnelle. L'avantage de la méthode logarithmique, tel qu'il est vu dans un article d'Alikhanov et al.¹⁾, est ainsi expliqué et démontré mathématiquement.

e. Il faut noter que les informations d'une mesure logarithmique peuvent être avantageusement traitées, après acquisition, par des méthodes telles que celle du maximum de vraisemblance.

3. Conception des encodeurs logarithmiques

Des encodeurs logarithmiques sont construits depuis de nombreuses années. On peut distinguer trois techniques principales.

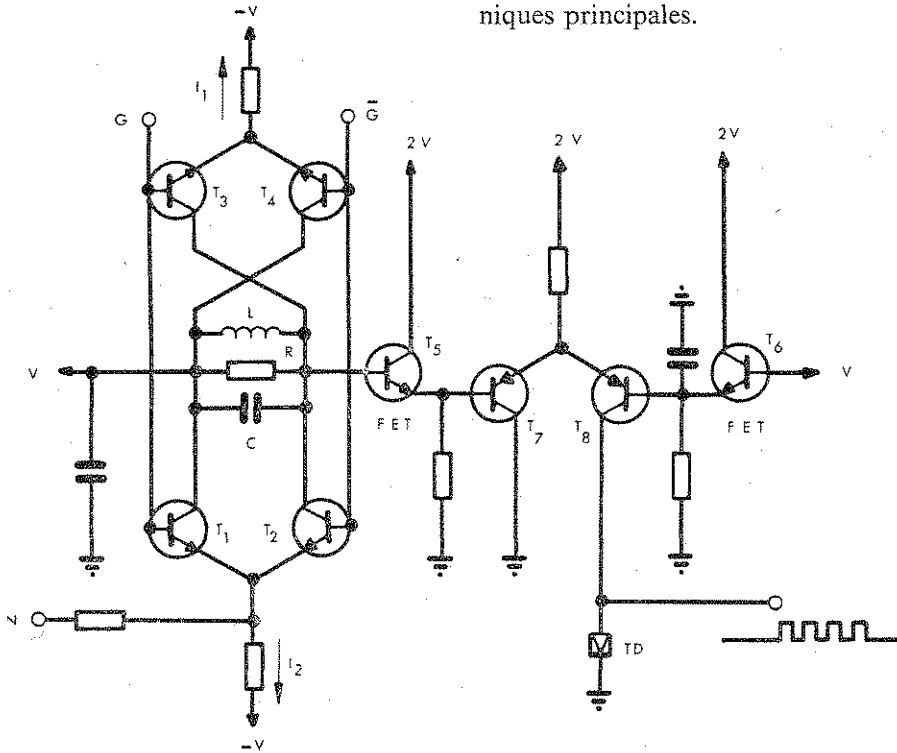
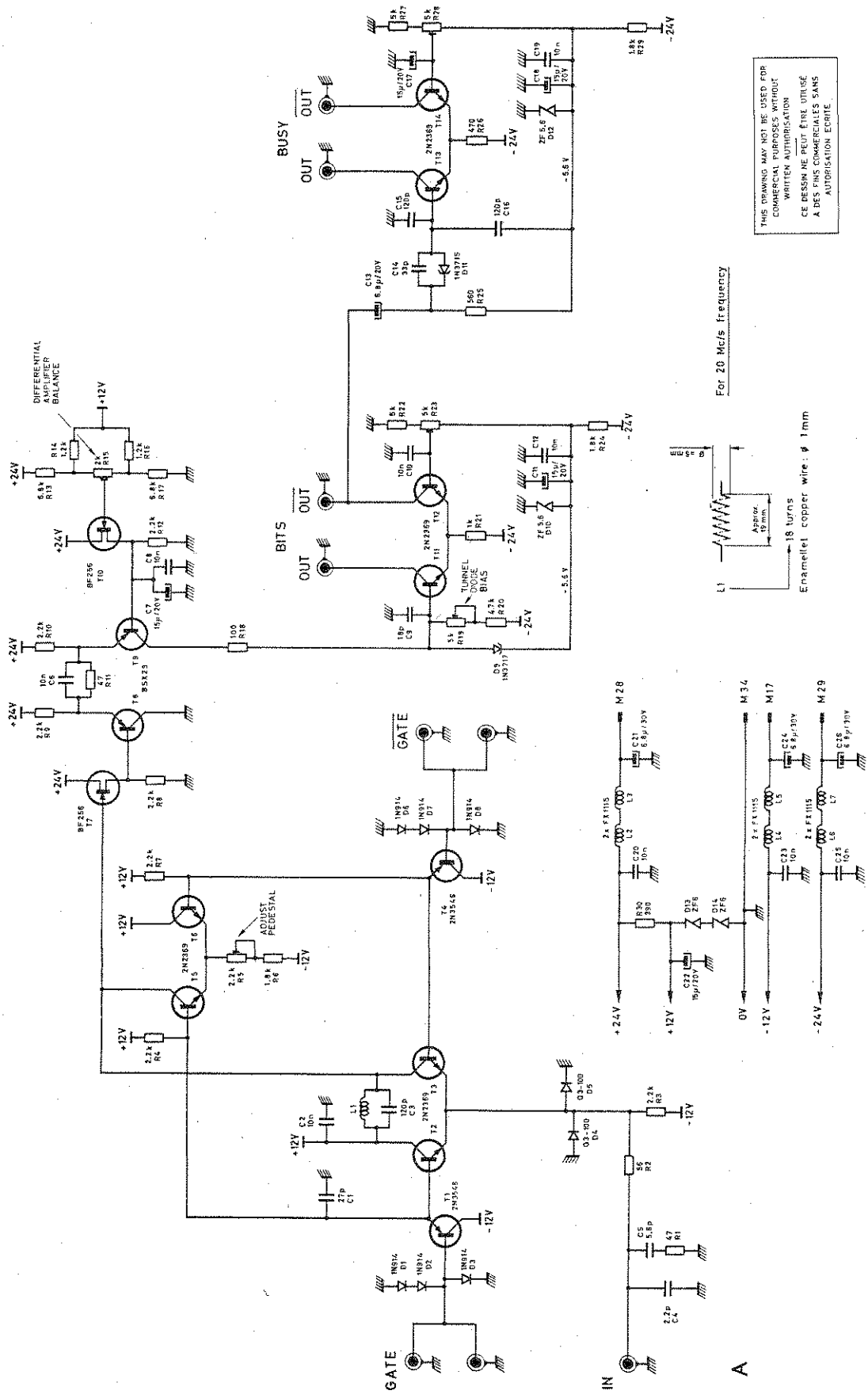


Fig. 4.



3.1. LES AMPLIFICATEURS LOGARITHMIQUES

Dans cette technique, on utilise un encodeur linéaire précédé d'un amplificateur logarithmique. Cette technique conduit à des circuits complexes largement décrits²).

3.2. TECHNIQUE DU STRETCHER EXPONENTIEL

L'impulsion rapide est intégrée par un circuit RC de constante de temps élevée et présentée à l'entrée d'une bascule de Schmitt. La sortie de la bascule commande un oscillateur qui délivre ainsi un nombre d'impulsions approximativement proportionnel au logarithme de la charge de l'impulsion d'entrée. Comme le temps de montée de l'impulsion intégrée est fini, le fonctionnement de ce type de circuit est forcément non linéaire pour les impulsions, dont l'amplitude est de l'ordre de grandeur du seuil. A la fig. 3, nous proposons le schéma d'un tel encodeur fonctionnant avec un oscillateur de 100 MHz.

3.3. TECHNIQUE DU CIRCUIT OSCILLANT

L'impulsion d'entrée charge la capacité d'un circuit LC faiblement amorti. Les oscillations d'amplitude exponentiellement décroissantes sont amplifiées et limitées. Le signal ainsi obtenu attaque une diode tunnel, qui donne une impulsion de sortie pour chaque oscillation dont l'amplitude dépasse un certain seuil fixé par la diode. Le nombre d'impulsions est alors donné par:

$$N = (R/\pi) (C/L)^{\frac{1}{2}} \ln (Q/Q_0).$$

Le décrément logarithmique du circuit oscillant détermine la précision relative obtenue sur la mesure de Q:

$$dQ/Q = (\pi/R) (L/C)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette méthode est particulièrement séduisante du fait de son caractère balistique. Il suffit en effet que l'impulsion d'entrée ait une durée plus courte que la demi-période du circuit oscillant pour qu'elle soit

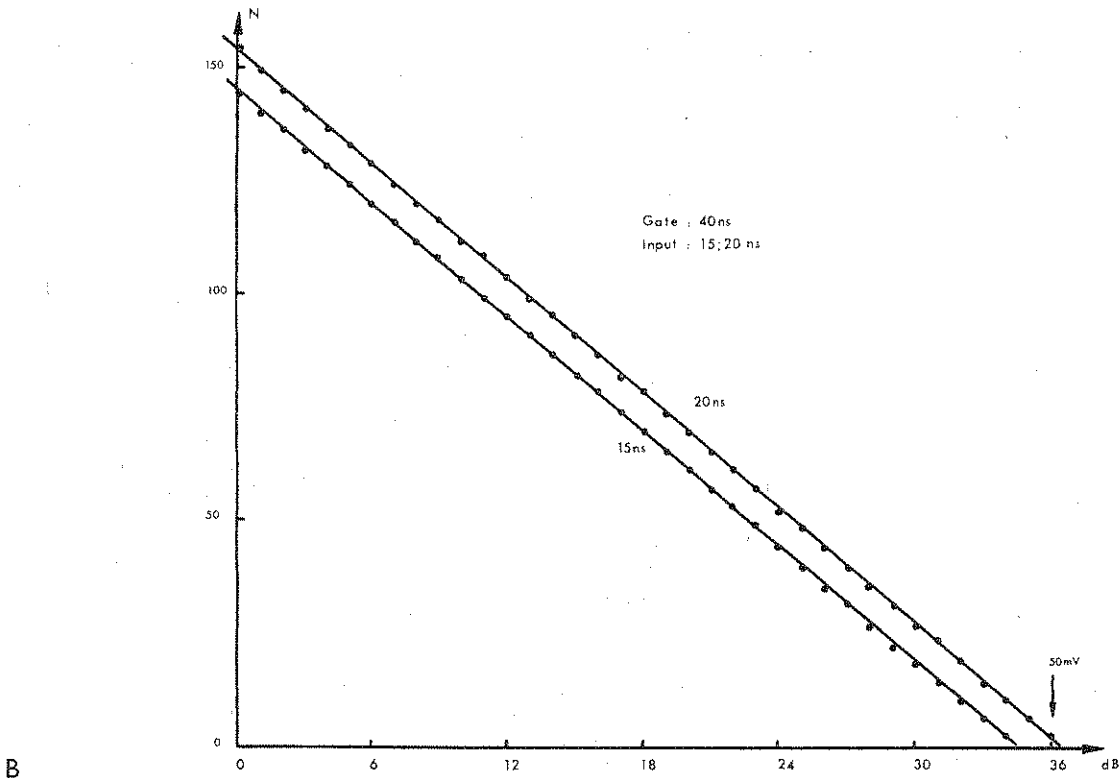


Fig. 5. A) Encoder logarithmique rapide à circuit oscillant. CARACTÉRISTIQUES: Entrée: 50 Ω, 200 mA maximum. Gate, Gate: Impulsion NIM complémentaire. G et G doivent être attaqués simultanément. Temps d'ouverture et de fermeture de la porte: < 5 nsec. Sortie: Impulsions complémentaires NIM 16 mA. Temps de montée et de descente 5 nsec, largeur à mi-hauteur 20 nsec. Fréquence 20 MHz. Sortie "Busy": Enveloppe du train d'impulsions. Sortie complémentaire 32 mA. Temps de montée 15 nsec; temps de descente 50 nsec. Linéarité et dynamique (voir fig. B): Linéarité meilleure que 3% entre 1 mA et 50 mA. Dynamique: supérieure à 1:50. Diminution de la fréquence: Il suffit d'augmenter la valeur de la self L. Pour 20 MHz, les caractéristiques de la self sont: diamètre: 6 mm, diamètre du fil: 1 mm, 18 spires jointives. Composants: Condensateurs de valeur non spécifiée: 10 nF; électrolytiques de valeur non spécifiée: 15 μF; transistors: 2N2369: T₁ à T₄, T₁₁ à T₁₄; 2N3546: T₅ et T₆; BF256: T₇ et T₈ (FET); BSX29: T₉ et T₁₀. Diodes non spécifiées: 1N914. B) Courbe de linéarité avec gate.

correctement analysée. Nous proposons, à la fig. 4, le schéma d'un tel encoder, destiné à l'analyse en amplitude d'impulsions Čerenkov. Il travaille à une fréquence de 20 MHz et est pourvu d'un "gate" rapide.

Le transistor T_5 est à effet de champ afin de garder une capacité constante aux bornes du circuit oscillant. Le circuit oscillant est à coefficient de qualité très élevé, et l'amortissement est contrôlé par la résistance R . Les transistors T_3 et T_4 suppriment le piédestal introduit par le signal de gate. En modifiant la valeur de I_2 , on peut introduire intentionnellement un piédestal $Q' = \Delta T(I_2 - I_1)$, où ΔT est la durée d'ouverture de gate ($\Delta T < \frac{1}{2}T$). On obtient ainsi une fonction caractéristique du type:

$$N = \frac{R}{\pi} \left(\frac{C}{L} \right)^{\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{Q + Q'}{Q_0} \right), \quad Q' = \Delta T(I_2 - I_1).$$

La sensibilité du circuit proposé est de quatre impulsions par décibel, ce qui correspond à une précision relative constante d'environ 3%. Sa linéarité est excellente sur près de 40 dB, et son comportement thermique est bon. Par un simple ajustement de la fréquence, ce montage peut être utilisé avec d'autres types de détecteurs (compteurs à scintillation, chambres proportionnelles, etc.). La valeur de cette fréquence constitue la principale restriction aux possibilités d'applications de ce genre de circuits.

4. Applications des encoders logarithmiques

4.1. COMPARAISON AVEC LES ENCODERS LINÉAIRES

Il est clair qu'un encoder logarithmique est intéressant chaque fois qu'une précision relative constante est nécessaire, c'est-à-dire chaque fois que le résultat d'une mesure est utilisé comme facteur dans un produit. Les encoders logarithmiques permettent, en outre, de réaliser facilement de très grandes dynamiques: 40 à 60 dB au moins. Il est remarquable, dans le cas du montage à circuit oscillant, qu'il n'existe aucune limitation de principe à la dynamique, contrairement aux encoders linéaires, du fait qu'il suffit d'amplifier suffisamment le signal du circuit oscillant pour obtenir la dynamique désirée. De surcroît, le nombre d'impulsions nécessaires pour obtenir une précision relative donnée est plus faible dans le cas d'un encoder logarithmique que dans celui d'un encoder linéaire. Ainsi, pour atteindre une précision minimum de 1% sur une dynamique de 1:100 (= 40 dB), il faudrait en principe 10000 bits d'un encoder linéaire, alors que 400 suffisent pour un encoder logarithmique. Finalement, on peut encore noter que la fonction seuil, qui se réalise à

l'aide d'un piédestal dans un encoder linéaire, est simplement obtenue par un préamplificateur dans le cas d'un encoder logarithmique.

4.2. APPLICATIONS AUX MESURES DISTRIBUÉES

Au paragraphe 2.1, nous avons rappelé les conditions de validité du théorème I. Celles-ci impliquent que la méthode linéaire ne peut s'appliquer correctement qu'à des distributions de fonction génératrice $f(x)$, telle que $f(x) = \theta(x^{-a})$ avec $a > 3$.

Si maintenant, dans une mesure distribuée, on veut traiter une distribution telle que:

$$f(x) = \theta(x^{-a}) \quad \text{avec } a > 1, \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

la méthode logarithmiques s'impose. Le cas des distributions de Landau pour lesquelles $a = 2$ est l'exemple-type d'une telle situation.

4.3. APPLICATION À L'IDENTIFICATION DES PARTICULES

De nombreuses méthodes d'identification des particules sont basées sur la constance d'une relation du type:

$$\Delta E(E + c\Delta E + E_0) = D = \text{cste.}$$

Cette fonction de discrimination peut être facilement réalisée par deux encoders logarithmiques du type décrit. Il suffit pour cela de régler l'un à une réponse du type:

$$N_1 = k_1 \ln \left(\frac{Q_1}{Q_0} \right),$$

et l'autre à la fonction caractéristique:

$$N_2 = k_2 \ln \left(\frac{Q_2 + Q'}{Q_0} \right).$$

Alors si $k_1 = k_2$, et si $Q_1 = \Delta E$ et $Q_2 = E + c\Delta E$, $N_1 + N_2$ réalise la fonction de discrimination désirée.

Si maintenant $k_1 \neq k_2$, on peut réaliser des fonctions de discrimination plus générales, du type:

$$(Q_1 + Q'_1)^{k_1} (Q_2 + Q'_2)^{k_2} = D.$$

Les encoders logarithmiques sont ainsi susceptibles d'avoir diverses applications dans des systèmes d'identification de particules.

4.4. APPLICATION AUX COMPTEURS ČERENKOV

Nous allons montrer que, dans certaines applications, la fonction de discrimination idéale d'un encoder destiné à digitaliser les impulsions d'un compteur Čerenkov est justement la fonction logarithme.

On sait que la lumière Čerenkov produit, après amplification par un photomultiplicateur, une impulsion de courant dont la charge s'écrit:

$$Q = k \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right),$$

où β est la vitesse de la particule et n l'indice de réfraction du milieu détecteur.

Si l'on utilise un encodeur linéaire, $N \sim Q$ et on obtient:

$$dN \sim d\beta/\beta^3.$$

Cette propriété ne présente pas d'intérêt immédiat. Par contre, dans le cas d'un encodeur logarithmique, on obtient:

$$dN = \frac{dQ}{Q} = \frac{d\beta}{\beta} \frac{2}{(\beta^2 n^2 - 1)}.$$

Cette grandeur, qui est gardée constante par l'utilisation d'un encodeur logarithmique, est intéressante. En effet, de la relation:

$$M = \frac{p}{\beta} (1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}},$$

on déduit:

$$\frac{dM}{M} = \frac{d\beta}{\beta} \frac{1}{(\beta^2 - 1)} \quad (\text{si } p = \text{cste}).$$

Cette quantité a justement la même forme que le dN d'un encodeur logarithmique.

Dans les cas suivants:

- discrimination de particules de même impulsion mais de masses différentes;

- détermination de la masse d'une particule par mesure de β et de p ;

on associera donc de préférence un encodeur logarithmique à un compteur Čerenkov. L'efficacité de cette méthode peut être augmentée en faisant une mesure distribuée par une batterie de compteurs Čerenkov.

Je tiens à remercier le Docteur L. Dick de m'avoir suggéré l'étude des encodeurs logarithmiques et de m'avoir donné la possibilité d'effectuer ce travail dans son groupe du CERN.

Je remercie de même le Docteur A. Henchoz, de l'Institut de Physique Nucléaire de l'Université de Lausanne, de l'aide qu'il m'a apportée dans la réalisation pratique des encodeurs, ainsi que toutes les personnes qui ont contribué par leurs conseils et leurs idées à ce travail.

Dans une publication récente [Nucl. Instr. and Meth. 92 (1971) 89] J. C. Barton et al. décrivent divers encodeurs logarithmiques utilisant la technique du circuit oscillant.

Références

- 1) A. I. Alikhanov, V. A. Lubimov et Gr. P. Eliseiev, C.R. Symp. CERN *Les accélérateurs de haute énergie et la physique des mésons π* , vol. 2, Genève, juin 1956 (CERN, Genève, 1956) p. 87.
- 2) T. Hiramoto, Nucl. Instr. and Meth. 32 (1965) 141.